با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم
فصل پنجم

عنوان فصل: تابع

از صفحه‌ی ۹۴ تا صفحه‌ی ۱۱۷ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل تابع آمده است.

مباحث فصل: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن، دامنه و برد توابع، انواع تابع

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۹۵ · فعالیت ۱ — جدول‌های رابطهٔ دو مجموعه ۶

۲ صفحه ۹۶ · فعالیت ۲ — نمودار پیکانی و تعریف تابع ۶

۳ صفحه ۹۶ · کار در کلاس ۱ — تشخیص تابع در نمودارهای پیکانی (دانش‌آموزان و ورزش) ۷

۴ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۲ — رسم نمودار پیکانی تابع و غیرتابع ۷

۵ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۳ — سن، وزن و غذای مورد علاقه ۸

۶ صفحه ۹۷ · کار در کلاس ۴ — تشخیص تابع بودن چند نمودار پیکانی ۸

۷ صفحه ۹۷ · فعالیت — نمایش تابع به‌صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی ۹

۸ صفحه ۹۸ · کار در کلاس ۱ — جمعیت شهرها ۹

۹ صفحه ۹۹ · کار در کلاس ۲ — نمایش‌های مختلف یک رابطه ۱۰

۱۰ صفحه ۹۹ · کار در کلاس ۳ — معیار تابع بودن مجموعهٔ زوج‌های مرتب ۱۱

۱۱ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۱ — کدام رابطه تابع است؟ ۱۱

۱۲ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۲ — روابط از A به B و نمایش با زوج مرتب و نمودار ۱۲

۱۳ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۳ — کدام مجموعه تابع است؟ ۱۲

۱۴ صفحه ۱۰۰ · تمرین ۴ — ساخت تابع از مجموعه‌های غیرعددی ۱۳

۱۵ صفحه ۱۰۱ · فعالیت — چندضلعی و مجموع زوایای داخلی ۱۳

۱۶ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۱ — ضلع مربع و محیط آن ۱۴

۱۷ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۲ — دامنه و برد با تعداد عضو معین ۱۴

۱۸ صفحه ۱۰۱ · کار در کلاس ۳ — دامنه، برد و مجموعهٔ B ۱۵

۱۹ صفحه ۱۰۲ · فعالیت — دنبالهٔ شکل‌ها و تابع ۲n−۱ ۱۵

۲۰ صفحه ۱۰۲ · کار در کلاس — برد تابع f(n)=2n+1 روی دامنهٔ مشخص ۱۶

۲۱ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — تابع خطی y=2x−1 ۱۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — وزن کودک و نمودار رشد (قسمت‌های الف تا ت) ... ۱۷

۲۳ صفحه ۱۰۴ · کار در کلاس ۱ — تشخیص تابع بودن از روی نمودار و معیار خط عمودی ... ۱۸

۲۴ صفحه ۱۰۵ · کار در کلاس — تابع بودن نمودارها (دامنه و برد) ... ۱۹

۲۵ صفحه ۱۰۵ · تمرین ۱ — تشخیص تابع بودن نمودارها و دامنه و برد ... ۱۹

۲۶ صفحه ۱۰۶ · تمرین ۲ — مثال‌هایی از توابع با دامنه و برد خاص ... ۲۰

۲۷ صفحه ۱۰۶ · تمرین ۳ — جدول و نمودار توابع y=2x با دامنه‌های مختلف ... ۲۰

۲۸ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۴ — ارتفاع شمع ۲۱

۲۹ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۵ — آیا خط x=2 و y=5 تابع‌اند؟ ۲۲

۳۰ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۶ — توابع خطی با دامنهٔ [−۳، ۵] ۲۲

۳۱ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۷ — نمایش جبری تابع با نمودار داده‌شده ... ۲۲

۳۲ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۸ — دمای سنگ‌ها در عمق زمین ۲۳

۳۳ صفحه ۱۰۷ · تمرین ۹ — رسم تابع f(x)=−۳ با دامنه‌های مختلف ... ۲۴

۳۴ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۰ — تابع خطی با f(۲)=۱۱ و f(۰)=۷ .... ۲۴

۳۵ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۱ — آیا جدول، تابع است؟ ۲۴

۳۶ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۲ — مسافت پیاده‌روی علی ۲۵

۳۷ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۳ — نوشتن تابع g با زوج مرتب و رسم نمودار ... ۲۵

۳۸ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۴ — سانتی‌گراد و فارنهایت ۲۵

۳۹ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۵ — محیط مستطیل برحسب عرض ... ۲۶

۴۰ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۶ — دو تابع با دامنه و برد یکسان و بدون زوج مرتب مشترک ... ۲۶

۴۱ صفحه ۱۰۸ · تمرین ۱۷ — نمودار تابعی با دامنهٔ [۰، ۲] و برد [−۲، ۱] ... ۲۶

۴۲ صفحه ۱۰۹ · فعالیت ۱ — توابع مساحت مربع و دایره، حجم کره، توابع چندجمله‌ای ... ۲۷

۴۳ صفحه ۱۱۰ · فعالیت ۲ — تابع همانی ۲۸

۴۴ صفحه ۱۱۰ · فعالیت ۳ — تابع ثابت ۲۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۵ صفحه ۱۱۰ · کار در کلاس ۱ — مثال‌هایی از چند نوع تابع ... ۲۸

۴۶ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس ۲ — مقایسهٔ توابع x^2 ..... ۲۹

۴۷ صفحه ۱۱۱ · فعالیت — تابع قدرمطلق ۳۰

۴۸ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — تابع قدرمطلق با دامنهٔ R ۳۰

۴۹ صفحه ۱۱۲ · فعالیت — توابع قطعه‌ای f، g، h و نمودارهایشان ... ۳۰

۵۰ صفحه ۱۱۳ · فعالیت — رسم توابع به کمک انتقال عمودی ... ۳۱

۵۱ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس ۱ — رسم نمودار توابع قطعه‌ای و محاسبهٔ مقادیر ... ۳۲

۵۲ صفحه ۱۱۳ · کار در کلاس ۲ — یافتن ضابطهٔ تابع قطعه‌ای از روی نمودار ... ۳۲

۵۳ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس ۱ — انتقال نمودار تابع قدرمطلق ... ۳۲

۵۴ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس ۲ — انتقال نمودار سهمی و رسم $(x+1)^2$ ... ۳۳

۵۵ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — تابع‌های درجه دوم و نمودارشان ... ۳۳

۵۶ صفحه ۱۱۵ · تمرین ۱ — تابع $f(x)=3x-1$ روی دامنه‌های مختلف ... ۳۴

۵۷ صفحه ۱۱۵ · تمرین ۲ — دامنه و برد توابع از روی نمودار ... ۳۵

۵۸ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۳ — درستی یا نادرستی گزاره‌ها دربارهٔ دامنه و برد ... ۳۵

۵۹ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۴ — حجم تانکر گاز ۳۶

۶۰ صفحه ۱۱۶ · تمرین ۵ — تشخیص نمودار هر تابع، دامنه و برد ... ۳۶

۶۱ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۶ — برد توابع تمرین ۵ روی دامنهٔ $[-۲، ۳]$ ... ۳۷

۶۲ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۷ — ضابطه و مقادیر تابع از روی نمودار ... ۳۸

۶۳ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۸ — تابع خطی گذرنده از (۴،۳) و (۰،۳) ... ۳۸

۶۴ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۹ — هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی ۳۸

۶۵ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۰ — کدام رابطه تابع است؟ ۳۹

۶۶ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۱ — الگوی ذوزنقه‌ها و محیط شکل ... ۳۹

۶۷ صفحه ۱۱۷ · تمرین ۱۲ — تابع درجه دوم با سهمی از دو نقطه ... ۴۰

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۹۵ فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقهٔ خودتان تکمیل کنید.

با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد. دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

.....

..... یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد. .....

جدول قیمت: به یک کالای معین فقط یک قیمت را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک کالا (مثلاً خودکار) دو قیمت متفاوت ندارد.

جدول نمره: به یک درس معین فقط یک نمره را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک درس، برای یک دانش‌آموز، دو نمرهٔ متفاوت ندارد.

جدول روز تولد: به یک شخص معین فقط یک روز تولد را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

جدول آخر (نمونه): به هر دانش‌آموز کلاس، شمارهٔ ملی او را نسبت می‌دهیم؛ هر دانش‌آموز فقط یک شمارهٔ ملی دارد. (یا: هر کشور ← پایتخت آن؛ هر کشور فقط یک پایتخت دارد.)

نتیجه: در همهٔ جدول‌ها، به هر عضو ستون اول دقیقاً یک عضو از ستون دوم نسبت داده شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۹۶ فعالیت ۲

جدول‌های فعالیت ۱ را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آن‌ها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد. به این شیوهٔ نمایش، نمودارهای پیکانی می‌گوییم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.

توجه دارید که در رابطه‌های بالا، از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این‌گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامند. برای تکمیل این مورد از مثال‌های مطرح‌شده در کلاس کمک بگیرید.

هر جدول را با دو مجموعه می‌نویسیم: اعضای ستون اول در مجموعهٔ A و اعضای ستون دوم در مجموعهٔ B قرار می‌گیرند و هر سطر جدول یک پیکان از A به B است:

- **ساعت ← دما:** ۸ ← ۱۵، ۹ ← ۱۶، ۱۰ ← ۱۷، ۱۱ ← ۱۷، ۱۲ ← ۱۸ (از هر ساعت یک پیکان؛ به ۱۷ دو پیکان می‌رسد که اشکالی ندارد).

- **کالا ← قیمت:** خودکار ← ۱۵۰۰، دفتر ← ۳۰۰۰، مداد ← ۱۰۰۰، خط‌کش ← ۱۵۰۰.
- **درس ← نمره:** ریاضی، فیزیک، شیمی و ادبیات هر کدام به نمرهٔ خودشان وصل می‌شوند (از هر درس فقط یک پیکان).
- **فرد ← روز تولد:** هر فرد (امیدی، احسانی، کشاورز، رستگار) به روز تولد خودش وصل می‌شود (از هر فرد فقط یک پیکان).

تعریف: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳ صفحه ۹۶ کار در کلاس ۱

مجموعهٔ A شامل سه دانش‌آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعهٔ B شامل دو رشتهٔ ورزشی است که دانش‌آموزان می‌توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده‌شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

برای تشخیص، از هر عضو A (محمد، حسین، امید) تعداد پیکان‌های خارج‌شده را می‌شماریم:

- اگر از **هر سه** دانش‌آموز **دقیقاً یک** پیکان خارج شده باشد، نمودار تابع است (مثلاً هر سه یک ورزش انتخاب کرده‌اند، حتی اگر هر سه یک رشته را انتخاب کرده باشند).
- اگر از یک دانش‌آموز **هیچ** پیکانی خارج نشده باشد (ورزشی انتخاب نکرده)، نمودار تابع نیست.
- اگر از یک دانش‌آموز **دو** پیکان خارج شده باشد (هم والیبال و هم فوتبال)، نمودار تابع نیست.

پس نمودارهایی که در آن‌ها هر دانش‌آموز دقیقاً یک پیکان دارد تابع‌اند و بقیه (دارای عضو بدون پیکان یا عضو با دو پیکان) تابع نیستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

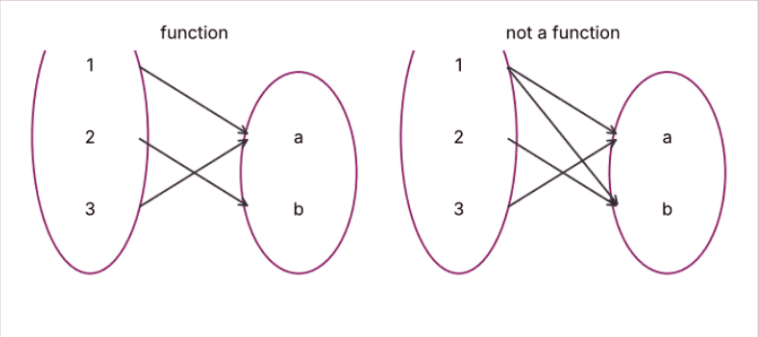
---

۴ صفحه ۹۷ کار در کلاس ۲

از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y این کار را به‌گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

نمونه (پاسخ‌های دیگر هم درست است). نمودار چپ تابع است: از هر عضو یک پیکان خارج شده. نمودار راست تابع نیست: از عضو ۱ دو پیکان خارج شده است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



۵ صفحه ۹۷ کار در کلاس ۳

الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آن‌ها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ رابطه‌ای که به افراد وزن آن‌ها را نسبت می‌دهد، چطور؟

ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقهٔ آن‌ها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید.

الف) بله، هر دو تابع‌اند؛ هر فرد (در یک زمان معین) فقط یک سن و فقط یک وزن دارد، پس از هر فرد دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود.

ب) خیر، معمولاً تابع نیست؛ چون یک فرد می‌تواند بیش از یک غذای مورد علاقه داشته باشد (مثلاً قورمه‌سبزی و قیمه)، پس از آن فرد دو پیکان خارج می‌شود. (فقط اگر هر فرد دقیقاً یک غذای مورد علاقه داشته باشد تابع خواهد بود.)

۶ صفحه ۹۷ کار در کلاس ۴

کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟ (نمودارها از A به B، C به D، E به F و X به Y)

برای هر نمودار از هر عضو مجموعهٔ سمت راست (مبدأ) پیکان‌ها را می‌شماریم. نمودار وقتی تابع است که:

1. از هیچ عضو مبدأ بدون پیکان نماند (هر عضو مبدأ حتماً پیکان دارد)،
2. از هیچ عضو مبدأ بیش از یک پیکان خارج نشود.

نمودارهایی که شرط بالا را داشته باشند تابع‌اند؛ اگر در نمودار عضوی از مبدأ دو پیکان داشته باشد یا هیچ پیکانی نداشته باشد، تابع نیست. (اینکه چند پیکان به یک عضو مقصد برسد یا عضوی از مقصد پیکان دریافت نکند، در تابع بودن اثری ندارد.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۷ صفحه ۹۷ **فعالیت**

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطهٔ بین زمان و دما را به‌صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.
اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض درنظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده‌شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به‌صورت زیر نمایش داد: (۴، ۵)، (۵، ۴)، (۶، ۳)، (۷، ۳)
در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفهٔ اول» و عضو دوم را «مؤلفهٔ دوم» می‌نامیم. مجموعهٔ f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار نیز دما را به زمان نسبت دهید و نمودار را به‌صورت زوج مرتب نمایش دهید.

ساعت	۴	۵	۶	۷
دما (سانتی‌گراد)	۵	۴	۳	۳

نمودار پیکانی: ۴ ← ۵، ۵ ← ۴، ۶ ← ۳، ۷ ← ۳. از هر ساعت دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس این رابطه **تابع** است (به ۳ دو پیکان رسیده؛ اشکالی ندارد).

نمایش زوج مرتبی:

$$f = \{(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)\}$$

هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ اول یکسان ندارند، پس f تابع است. دامنهٔ f برابر {۴، ۵، ۶، ۷} و برد آن {۳، ۴، ۵} است. زوج‌های (۴، ۵) و (۵، ۴) برابر نیستند، چون ترتیب مهم است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۸ صفحه ۹۸ **کار در کلاس ۱**

نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز، اهواز و کرمان در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به‌طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).
رابطهٔ بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت تقریبی (میلیون نفر)	۸/۷	۳/۲	۲	۱/۶	۱/۶	۱/۱	۰/۷

نمودار پیکانی: از هر شهر یک پیکان به جمعیت همان شهر می‌رود (مثلاً تهران ← ۸/۷، مشهد ← ۳/۲، ...).

زوج مرتبی:

{(تهران، ۸/۷)، (مشهد، ۳/۲)، (اصفهان، ۲)، (شیراز، ۱/۶)، (تبریز، ۱/۶)، (اهواز، ۱/۱)، (کرمان، ۰/۷)}

هر شهر فقط یک جمعیت دارد (مؤلفهٔ اول هیچ دو زوجی یکسان نیست)؛ پس این رابطه **تابع** است. (برابر بودن جمعیت دو شهر مانعی ندارد.)

اعداد جمعیت تقریبی‌اند و پاسخ‌های دیگر نزدیک به آن‌ها هم پذیرفته است.

۹ صفحه ۹۹ کار در کلاس ۲

در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

ستون‌ها: توصیف رابطه | مجموعهٔ زوج‌های مرتب | نمودار پیکانی | جدول یا نمودار

ردیف ۱: «به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.» با زوج‌های {(۱،۱)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۳،۱)، (۳،۳)}

ردیف ۲: زوج‌های {(۲،۴)، (۳،۹)، (۴،۱۶)}

ردیف ۳: «به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آن‌ها را نسبت می‌دهد.»

ردیف ۴: نمودار پیکانی از {-۲، ۰، ۲} به {-۱، ۰، ۱}

ردیف ۱: پیکان‌ها: ۱ ← ۱؛ ۲ ← ۱ و ۲؛ ۳ ← ۱ و ۳. جدول: ورودی ۲ دو خروجی ۱ و ۲ دارد. چون از ۲ و ۳ دو پیکان خارج می‌شود، **تابع نیست**.

ردیف ۲: توصیف: «به هر عدد، مربع آن را نسبت می‌دهد» (به اعداد ۲، ۳، ۴ مربعشان را). نمودار پیکانی: ۲ ← ۴، ۳ ← ۹، ۴ ← ۱۶. **تابع است**.

ردیف ۳: ریشه‌های دوم ۴ برابر ۲ و ۲- و ریشه‌های دوم ۷ برابر $\sqrt{7}$ و $-\sqrt{7}$ هستند:

$$\{(4,2),(4,-2),(7,\sqrt{7}),(7,-\sqrt{7})\}$$

از ۴ دو پیکان (به ۲ و ۲-) و از ۷ دو پیکان خارج می‌شود، پس **تابع نیست**.

ردیف ۴: برای نمونه پیکان‌ها $1 \to 2$, $0 \to 0$, $-1 \to -2$ باشند (هر عدد به نصف خودش): توصیف «هر عدد را به نصف آن نسبت می‌دهد»؛ مجموعهٔ زوج‌های مرتب:

$$\{(-2,-1),(0,0),(2,1)\}$$

از هر عضو دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود، پس **تابع است**. (ردیف آخر به دلخواه؛ مثلاً: به هر عدد فرد کمتر از ۷ بیشترین مقسوم‌علیه‌اش را نسبت می‌دهیم.)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰ صفحه ۹۹ کار در کلاس ۳

الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

$f = \{(۱، ۵)، (۲، ۹)، (۳، ۱۰)\}$ $g = \{(۱، ۵)، (۲، ۹)، (۲، ۵)، (۳، ۱۰)\}$

ب) با تکمیل جملهٔ زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به‌صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به‌دست آورید: اگر یک رابطه به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن ..... .

الف) f تابع است، چون مؤلفه‌های اول (۱، ۲، ۳) همه متفاوت‌اند و از هر عضو یک پیکان خارج می‌شود.

g تابع نیست؛ چون دو زوج مرتب (۲، ۹) و (۲، ۵) مؤلفهٔ اول یکسان (۲) ولی مؤلفهٔ دوم متفاوت دارند، یعنی از ۲ دو پیکان خارج می‌شود.

ب) «...هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن **مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند**» (یا: مؤلفهٔ اول مشترک ولی مؤلفهٔ دوم متفاوت نداشته باشند).

۱۱ صفحه ۱۰۰ تمرین ۱

کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید.

الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می‌دهد.

ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.

د) رابطه‌ای که به هر دانش‌آموز، دوستان او را نسبت می‌دهد.

هـ) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می‌دهد.

و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

الف) تابع است؛ هر مربع با ضلع a فقط یک محیط دارد: $P = ۴a$.

ب) تابع است؛ هر فرد در یک زمان معین فقط یک دمای بدن دارد.

ج) تابع است؛ هر فرد فقط یک گروه خونی دارد.

د) تابع نیست؛ یک دانش‌آموز می‌تواند چند دوست داشته باشد (چند پیکان از یک عضو).

هـ) تابع نیست؛ هر عدد مثبت دو ریشهٔ دوم دارد، مثلاً ۴ ← ۲ و ۲-. (عدد منفی ریشهٔ دوم ندارد و برای صفر یک ریشه داریم.)

و) تابع است؛ هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشهٔ سوم دارد، مثلاً ریشهٔ سوم ۸ برابر ۲ و ریشهٔ سوم ۸- برابر ۲- است.

۱۲ صفحه ۱۰۰ تمرین ۲

مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{۱, ۲\}$ داده شده‌اند.

الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

ج) چهار رابطهٔ به‌دست‌آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

الف) از هر عضو A دقیقاً یک پیکان به B رسم می‌کنیم:

- f_1: a ← ۱، b ← ۱، c ← ۲
- f_2: a ← ۱، b ← ۲، c ← ۲

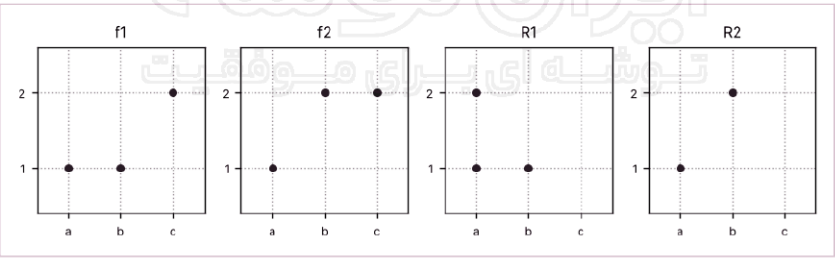
ب) یا از یک عضو دو پیکان خارج شود یا از عضوی هیچ پیکانی خارج نشود:

- R_1: a ← ۱ و ۲، ۱ ← b (از a دو پیکان؛ از c هیچ پیکان)
- R_2: a ← ۱، b ← ۲ (از c هیچ پیکانی خارج نشده)

ج) نمایش زوج مرتبی:

- $f_1 = \{(a,۱)، (b,۱)، (c,۲)\}$
- $f_2 = \{(a,۱)، (b,۲)، (c,۲)\}$
- $R_1 = \{(a,۱)، (a,۲)، (b,۱)\}$
- $R_2 = \{(a,۱)، (b,۲)\}$

نمودار مختصاتی: روی محور افقی a، b، c و روی محور عمودی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند. نقاط هر رابطه روی نمودار زیر مشخص شده‌اند (در f_1 و f_2 روی هر خط عمودی دقیقاً یک نقطه هست؛ در R_1 روی خط a دو نقطه و در R_2 روی خط c هیچ نقطه‌ای نیست).



۱۳ صفحه ۱۰۰ تمرین ۳

کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$f = \{(۱، ۲)، (۳، ۵-)، (۳، ۷)\}$ $g = \{(۱، ۸)، (۱، ۳/۵)، (۱، ۵-)، (۱، ۰)\}$

$h = \{(۲، ۳)، (۳، ۲)، (۱، ۱)\}$ $k = \{(۲، ۵)\}$

$r = \{(۲، ۰)، (۷-، ۰)\}$ $l = \{(۱، ۲)، (۲، ۴)، (۳، ۶)، ...\}$

طبق معیار، مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب تابع است که هیچ دو زوج متمایزی مؤلفهٔ اول یکسان نداشته باشند.

- **f:** تابع نیست؛ دو زوج (۳، ۵-) و (۳، ۷) مؤلفهٔ اول یکسان و مؤلفهٔ دوم متفاوت دارند.
- **g:** تابع نیست؛ چهار زوج مؤلفهٔ اول یکسان (۱) و مؤلفه‌های دوم متفاوت دارند.
- **h:** تابع است؛ مؤلفه‌های اول ۲، ۳ و ۱ متفاوت‌اند.
- **k:** تابع است؛ فقط یک زوج مرتب دارد.
- **r:** تابع است؛ مؤلفه‌های اول ۲ و ۷- متفاوت‌اند (برابر بودن مؤلفه‌های دوم مشکلی ندارد).
- **l:** تابع است؛ هر عدد طبیعی x به ۲x نسبت داده شده و مؤلفه‌های اول همه متفاوت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴ صفحه ۱۰۰ **تمرین ۴**

A و B مجموعه‌هایی غیرعددی‌اند. در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید دست‌کم سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

برای نمونه: A = {سیب، موز، هویج} و B = {میوه، سبزی}.

- تابع ۱ (نوع خوراکی): سیب ← میوه، موز ← میوه، هویج ← سبزی.
- تابع ۲ (همه به یک عضو): سیب ← میوه، موز ← میوه، هویج ← میوه.
- تابع ۳: سیب ← سبزی، موز ← میوه، هویج ← سبزی.

در هر سه نمودار از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده است، پس هر کدام تابع‌اند. (پاسخ‌های دیگر هم درست است.)

۱۵ صفحه ۱۰۱ **فعالیت**

در جدول زیر رابطهٔ بین تعدادی چندضلعی و مجموع زوایای داخلی آن‌ها داده شده است. جدول را کامل کنید. (مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی)

این رابطه را به‌صورت زوج مرتبی نمایش دهید: f = {(مثلث، ۱۸۰)، (مربع، ...)، (لوزی، ...)، (پنج‌ضلعی، ...)}

چرا f یک تابع است؟

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج‌ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	۱۸۰	۳۶۰	۳۶۰	۵۴۰

مجموع زوایای داخلی nضلعی $(n-2)\times 180^\circ$ است: برای چهارضلعی‌ها ۳۶۰ و برای پنج‌ضلعی $3\times 180 = 540$.

f = {(مثلث، ۱۸۰)، (مربع، ۳۶۰)، (لوزی، ۳۶۰)، (پنج‌ضلعی، ۵۴۰)}

f تابع است چون هر چندضلعی فقط یک مجموع زوایای داخلی دارد؛ یعنی مؤلفه‌های اول زوج‌ها (مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی) همه متفاوت‌اند. (مربع و لوزی هر دو ۳۶۰ دارند که مشکلی ایجاد نمی‌کند.)

دامنه: {مثلث، مربع، لوزی، پنج‌ضلعی} و برد: {۱۸۰، ۳۶۰، ۵۴۰}.

۱۶ صفحه ۱۰۱ | کار در کلاس ۱

در جدول زیر رابطهٔ بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع: $\frac{1}{2}$، ۱، $\frac{3}{2}$، ۲ | محیط: ۲، ۴، ...، ...

رابطهٔ داده‌شده را به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

محیط مربع ۴ برابر ضلع آن است: $P = 4a$. پس برای ضلع $\frac{3}{2}$ محیط ۶ و برای ضلع ۲ محیط ۸ می‌شود.

طول ضلع	۱/۲	۱	۳/۲	۲
محیط	۲	۴	۶	۸

$$f = \left\{\left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 4), \left(\frac{3}{2}, 6\right), (2, 8)\right\}$$

f تابع است چون مؤلفه‌های اول (طول ضلع‌ها) همه متفاوت‌اند؛ یعنی هر ضلع فقط یک محیط دارد.

دامنه = $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ و برد = {۲، ۴، ۶، ۸}.

۱۷ صفحه ۱۰۱ | کار در کلاس ۲

الف) تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنهٔ آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

الف) $f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$؛ دامنه {۱، ۲، ۳} (سه عضو) و برد {a, b} (دو عضو).

ب) خیر؛ چون از هر عضو دامنه دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود، تعداد اعضای برد نمی‌تواند از تعداد اعضای دامنه بیشتر باشد. با دو عضو در دامنه حداکثر دو عضو در برد داریم.

۱۸ صفحه ۱۰۱ **کار در کلاس ۳**

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، می‌دانیم که دامنهٔ f همان مجموعهٔ A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعهٔ B برابر است؟ مثال بزنید.

خیر. برد فقط شامل اعضایی از B است که پیکانی به آن‌ها رسیده؛ پس برد زیرمجموعه‌ای از B است و ممکن است برابر B نباشد.

مثال: $A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \{(1, 1), (2, 1)\}$؛ دامنهٔ f برابر A است ولی برد آن {۱} است که با B برابر نیست.

۱۹ صفحه ۱۰۲ **فعالیت**

دنبالهٔ شکل‌های زیر را درنظر بگیرید (شکل اول ۱ دایره، شکل دوم ۳ دایره، شکل سوم ۵ دایره، شکل چهارم ۷ دایره، ...). جدول را کامل کنید. (شمارهٔ شکل: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ...، ۱۰۰، ...، n؛ تعداد دایره‌ها: ۱، ۳، ...)

چرا این جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع: {(۱، ۱)، (۲، ۳)، (۳، ۵)، ...، (۱۰۰، ...)، ...، (n، ...)، ...}، f =

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه‌هایی هستند؟ نام ببرید.

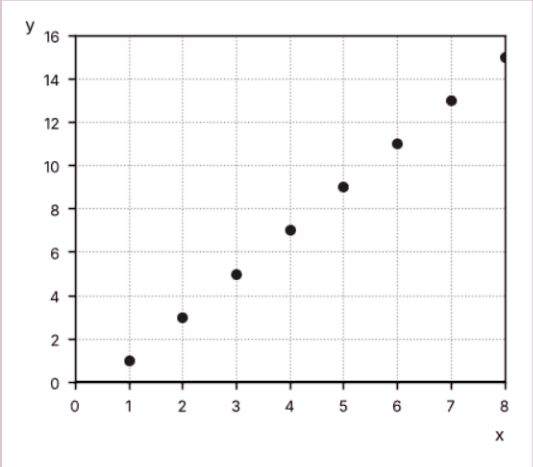
هر شکل از دایره‌های شکل قبلی ۲ تا بیشتر دارد؛ شکل nام $2n - 1$ دایره دارد.

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n
تعداد دایره‌ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	2n−1

هر شکل (هر عدد طبیعی) فقط یک تعداد دایره دارد، پس مؤلفه‌های اول زوج‌ها متفاوت‌اند و رابطه تابع است:

$$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), \ldots, (100, 199), \ldots, (n, 2n - 1), \ldots\}$$

نمودار پیکانی: ۱ ← ۱، ۲ ← ۳، ۳ ← ۵، ۴ ← ۷، ... ، 2n−1 ← n. **نمودار مختصاتی:** نقطه‌های جدا از هم (نه خط پیوسته) به‌صورت زیر:



دامنه = مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و **برد** = مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد $\{1, 3, 5, 7, ...\}$.

۲۰ صفحه ۱۰۲ **کار در کلاس**

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = 2n + 1$ داده شده باشد و دامنهٔ آن $A = \{1، 2، 3، 4\}$ باشد، برد تابع f را به‌دست آورید.

$f(1) = 3,\quad f(2) = 5,\quad f(3) = 7,\quad f(4) = 9$

پس برد تابع f برابر **{۳، ۵، ۷، ۹}** است.

۲۱ صفحه ۱۰۳ **کار در کلاس**

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید. (x: ۱-، ۰، ۱، ۲، ۳)

آیا می‌توانید شباهت و تفاوت این جدول را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

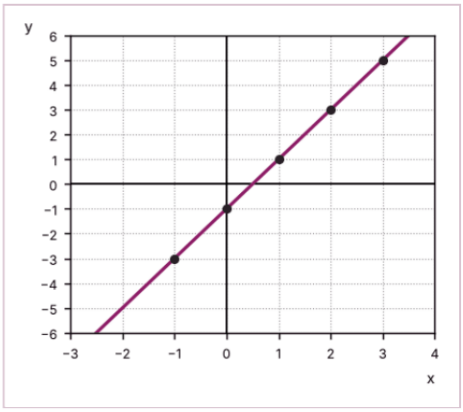
نمودار این تابع و تابع داده‌شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟

دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in N$ مقایسه کنید. جاهای خالی را کامل کنید: $g(...) = 2$، ...، $g(0) = ...$، ...

نمایش جبری تابع داده‌شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = ...$ در اینجا x یک عدد ..... است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
$y = 2x - 1$	۳-	۱-	۱	۳	۵



شباهت: ضابطهٔ هر دو ۲ برابر ورودی منهای ۱ است؛ و نقطه‌های فعالیت قبل روی همین خط قرار دارند. **چرا تابع است؟** به هر x فقط یک $y = 2x - 1$ نسبت داده می‌شود (مؤلفه‌های اول متفاوت‌اند).

تفاوت: در فعالیت قبل x فقط عدد طبیعی بود (نقطه‌های جدا از هم؛ دامنه N و برد اعداد فرد)، ولی اینجا x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد و نمودار یک خط پیوسته است؛ دامنه و برد تابع g هر دو مجموعهٔ اعداد حقیقی R هستند.

مقدارها: $g(۱۰) = ۱۹,\ g(۵) = ۹,\ g(۴) = ۷,\ g(۳) = ۵,\ g(\frac{۳}{۲}) = ۲,\ g(۰) = -۱$

$$g(x) = ۲x - ۱$$

در اینجا x یک عدد **حقیقی** است. این تابع خطی است (شکل $y = ax + b$ با $a = ۲$ و $-b = ۱$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۲ صفحه ۱۰۳ فعالیت

هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند: الف) رشد مطلوب، ب) کندی رشد، پ) توقف رشد، ت) افت رشد.

جدول زیر نشان‌دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد. (زمان به ماه: ۰ تا ۱۲؛ وزن به کیلوگرم: ۲/۸، ۳/۳، ۴/۲، ۵، ۵، ۵، ۴/۸، ۴/۵، ۵/۵، ۶/۵، ۷/۲، ۸، ۸/۵)

الف) به نظر شما در فاصلهٔ زمانی تولد تا سه‌ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان‌داده‌شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصلهٔ زمانی‌ای وزن او ثابت مانده است؟

پ) اعداد داده‌شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست‌آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسهٔ این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

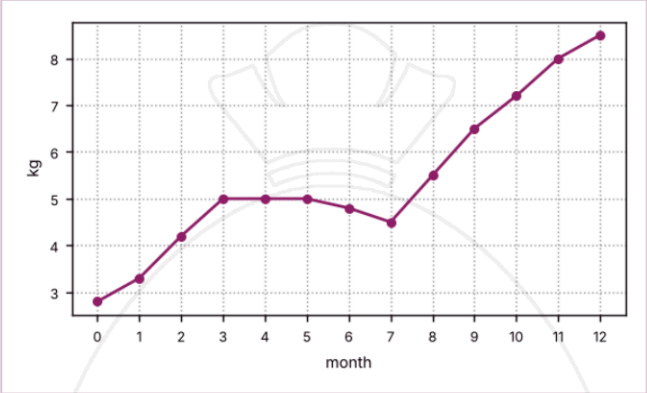
وزن کودک در فاصلهٔ بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصلهٔ بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

الف) وزن از ۲/۸ تا ۵ کیلوگرم و به‌سرعت بالا می‌رود؛ این وضعیت با «**رشد مطلوب**» (شکل ۲، الف) مطابقت دارد.

ب) از پایان ماه سوم تا پایان ماه پنجم وزن ثابت و برابر ۵ کیلوگرم بوده است (توقف رشد). همچنین از ماه ۵ تا ۷ وزن کم شده است (افت رشد).

پ) نقطه‌های (ماه، وزن) را در شکل (۱) مشخص و به هم وصل می‌کنیم:



بررسی: تا ماه سوم رشد مطلوب است؛ سپس سه ماه توقف رشد، بعد افت وزن (۴/۸ و ۴/۵)، و پس از آن دوباره افزایش مناسب وزن تا ۸/۵ کیلوگرم. پس رشد کودک در این سال یکنواخت و طبیعی نبوده و نیاز به توجه پزشک داشته است.

تقریب وزن بین ماه‌ها: با خوانش از نمودار وصل‌شده، مثلاً وزن در ماه ۱/۵ تقریباً ۳/۸ کیلوگرم و در ماه ۹/۵ حدود ۶/۸ کیلوگرم است.

ت) دامنه = {۰، ۱، ۲، ...، ۱۲} و برد = {۲/۸، ۳/۳، ۴/۲، ۴/۵، ۴/۸، ۵، ۵/۵، ۶/۵، ۷/۲، ۸، ۸/۵}. نمودار پیکانی: هر ماه به وزن همان ماه وصل می‌شود (۰ ← ۲/۸، ۱ ← ۳/۳، ۲ ← ۴/۲، ۳ و ۴ و ۵ هر سه ← ۴/۸، ۶ ← ۴/۵، ۷ ← ۸ ← ۵/۵، ۹ ← ۶/۵، ۱۰ ← ۷/۲، ۱۱ ← ۸، ۱۲ ← ۸/۵). از هر ماه دقیقاً یک پیکان خارج می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۳ صفحه ۱۰۴ **کار در کلاس ۱**

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید. می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آن‌ها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جملهٔ زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به‌صورت نمودار ارائه می‌شود، به‌دست آورید: اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در ..... قطع کند.

روش: نقطه‌های نمودار را به‌صورت زوج مرتب می‌خوانیم. اگر دو نقطه مؤلفهٔ اول (طول) یکسان و مؤلفهٔ دوم (عرض) متفاوت داشته باشند (یعنی یک خط عمودی نمودار را در دو نقطه ببرد)، نمودار تابع نیست؛ در غیر این صورت تابع است. دامنه = مجموعهٔ طول‌های نقطه‌ها (تصویر نمودار روی محور x) و برد = مجموعهٔ عرض‌ها (تصویر روی محور y).

تکمیل جمله: «...حداکثر در **یک نقطه** قطع کند.»

نکته: نمودارهای شکل کتاب در دسترس نبود؛ هر کدام را با همین معیار (آزمون خط عمودی) بررسی کنید: نمودارهایی مثل دایره یا سهمی خوابیده (به سمت راست/چپ باز) که خط عمودی را در دو نقطه می‌برند تابع نیستند؛ نمودارهای مثل سهمی رو به بالا، خط غیرعمودی و نقاط با طول‌های متفاوت تابع‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴ صفحه ۱۰۵ کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟

از آزمون خط عمودی استفاده می‌کنیم: اگر هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار تابع است؛ اگر حتی یک خط عمودی نمودار را در دو نقطه یا بیشتر ببرد، تابع نیست (مثلاً زوج‌هایی مانند (۱، ۲) و (۱، ۲−) هر دو روی نمودار باشند). برای نمودارهای تابع، دامنه تصویر نمودار روی محور x و برد تصویر آن روی محور y است.

نمودارهای این بخش در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵ صفحه ۱۰۵ تمرین ۱

کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

هر نمودار را با خط‌های عمودی آزمایش می‌کنیم؛ نمودارهایی که هر خط عمودی را حداکثر در یک نقطه قطع کنند تابع‌اند. برای هر تابع، دامنه = همهٔ طول‌های نقاط نمودار و برد = همهٔ عرض‌های نقاط نمودار (در صورت امکان به صورت بازه یا مجموعه).

شکل‌های این تمرین در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶ صفحه ۱۰۶ تمرین ۲

تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

پ) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنهٔ آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

الف) $f = \{(۱, ۵), (۲, ۷)\}$ (دامنه $\{۱، ۲\}$).

ب) $f = \{(۱, ۳), (۲, ۳), (۵, ۳)\}$ (برد $\{۳\}$).

پ) $f = \{(۴, ۶)\}$ (دامنه $\{۴\}$).

ت) $f(x) = ۲, \quad x \in \mathbb{R}$ (دامنه R نامتناهی و برد $\{۲\}$).

ث) $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$ یا $f(n) = ۲n - ۱, \quad n \in \mathbb{N}$ (دامنه و برد هر دو نامتناهی).

۲۷ صفحه ۱۰۶ تمرین ۳

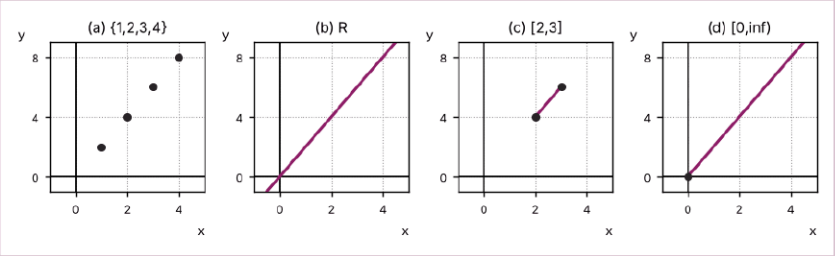
جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول توصیف شده‌اند، رسم کنید.

(الف) $y = 2x$ با دامنهٔ $\{۱، ۲، ۳، ۴\}$ (ب) $h(x) = 2x$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی (پ) $g(x) = 2x$ با دامنهٔ $[۲، ۳]$

(ت) $f(x) = 2x$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی؛ برد: ؟

تابع	دامنه	برد
الف) $y = 2x$	$\{۱، ۲، ۳، ۴\}$	$\{۲، ۴، ۶، ۸\}$
ب) $h(x) = 2x$	R	R
پ) $g(x) = 2x$	$[۲، ۳]$	$[۴، ۶]$
ت) $f(x) = 2x$	$[۰، +\infty)$	$[۰، +\infty)$

نمودارها: (الف) چهار نقطهٔ جدا (۱، ۲)، (۲، ۴)، (۳، ۶)، (۴، ۸)؛ (ب) کل خط $y = 2x$؛ (پ) پاره‌خطی از (۲، ۴) تا (۳، ۶) با نقطه‌های دو سر؛ (ت) نیم‌خطی که از مبدأ شروع می‌شود و به سمت بالا می‌رود.



برد هر کدام با ضرب دامنه در ۲ به دست می‌آید.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۸ صفحه ۱۰۷ تمرین ۴

یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر آن می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید. (x زمان، y ارتفاع شمع؛ x = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵)

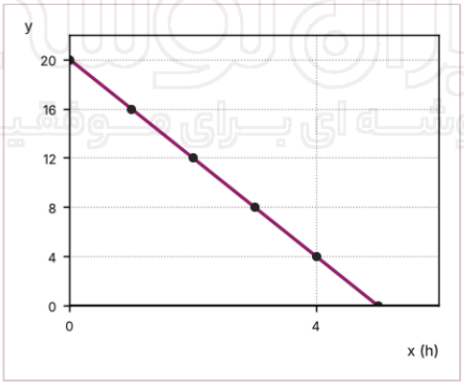
نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

ارتفاع شمع بعد از x ساعت: $y = ۲۰ - ۴x$. شمع وقتی خاموش می‌شود که $y = ۰$ باشد:

$۲۰ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۵$ ؛ یعنی پس از **۵ ساعت** خاموش می‌شود.

x (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع، سانتی‌متر)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰



نمودار پاره‌خطی از (۰، ۲۰) تا (۵، ۰) است (دامنه [۰، ۵]). تابع خطی است چون ضابطه‌اش به شکل $y = ax + b$ با $a = -۴$ و $b = ۲۰$ است؛ ارتفاع در هر ساعت مقدار ثابتی (۴ سانتی‌متر) کم می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۲۹ صفحه ۱۰۷ تمرین ۵

آیا خط $x = ۲$ را می‌توان به‌عنوان یک تابع درنظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = ۵$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز درنظر گرفت؟

خط $x = ۲$ تابع نیست؛ همهٔ نقطه‌های $(۲, y)$ روی آن‌اند و برای $x = ۲$ بی‌شمار y وجود دارد (یک خط عمودی نمودار را در بی‌نهایت نقطه می‌برد).

خط $y = ۵$ تابع است (تابع ثابت)؛ به هر x دقیقاً یک $y = ۵$ نسبت داده می‌شود و هر خط عمودی آن را در یک نقطه می‌برد.

در حالت کلی: هر خطی که **موازی محور عرض‌ها (عمودی) نباشد** یک تابع است (به شکل $y = ax + b$).

۳۰ صفحه ۱۰۷ تمرین ۶

نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنهٔ آن بازهٔ $[-۳, ۵]$ باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع وجود دارند؟

هر تابع $f(x) = ax + b$ با دامنهٔ $[-۳, ۵]$ مثال است؛ مثلاً:

$$f(x) = x, \quad g(x) = ۲x + ۱, \quad h(x) = -x + ۴, \quad x \in [-۳, ۵]$$

چون برای a و b می‌توان هر عدد حقیقی را انتخاب کرد (حتی $a = ۰$ و تابع ثابت)، تعداد این توابع **بی‌شمار (نامتناهی)** است.

۳۱ صفحه ۱۰۷ تمرین ۷

نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به‌دست آورید. از بین نمایش‌های مختلفی که برای این تابع می‌دانید، کدام‌یک مناسب‌تر است؟

روش: اگر نمودار خط است، دو نقطهٔ مشخص روی آن، مثلاً $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، را می‌خوانیم و شیب را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}, \qquad y = ax + b$$

سپس b را از جای‌گذاری یکی از نقطه‌ها (یا از عرض از مبدأ) به‌دست می‌آوریم. از میان نمایش‌ها (جدول، زوج مرتب، نمودار پیکانی، نمودار و ضابطهٔ جبری) برای تابع‌های با دامنهٔ بی‌نهایت نمایش جبری مناسب‌تر است؛ زیرا کوتاه است و مقدار تابع را برای هر x نشان می‌دهد.

شکل کتاب در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۲ صفحه ۱۰۷ تمرین ۸

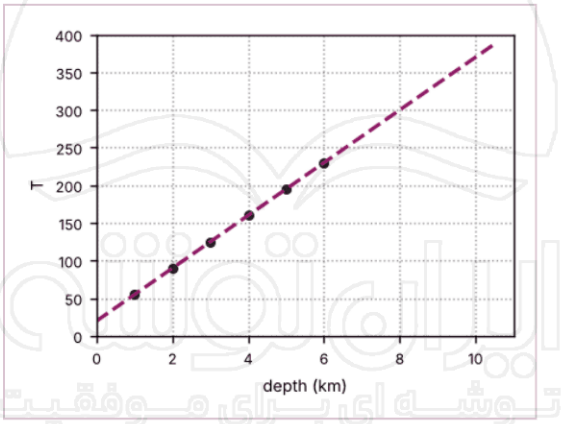
جدول زیر دمای سنگ‌ها را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد. (عمق به کیلومتر: ۱ تا ۶؛ دما به سانتی‌گراد: ۵۵، ۹۰، ۱۲۵، ۱۶۰، ۱۹۵، ۲۳۰)

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است، بیابید.

الف) هر عمق دقیقاً یک دما دارد (عمق‌های جدول همه متفاوت‌اند)، پس به هر عضو دامنه فقط یک عضو برد نسبت داده می‌شود. نقطه‌های (۱، ۵۵)، (۲، ۹۰)، ...، (۶، ۲۳۰) روی یک خط‌اند:



ب) با افزایش هر یک کیلومتر عمق، دما ۳۵ درجه بالا می‌رود، پس شیب ۳۵ است: $T = ۳۵d + b$. از $T = ۵۵,\ d = ۱$ داریم $b = ۲۰$:

$$T = ۳۵d + ۲۰$$

(آزمایش: $۳۵ \times ۶ + ۲۰ = ۲۳۰$ ✓)

پ) $T = ۳۵ \times ۱۰ + ۲۰ = ۳۷۰$؛ دمای سنگ در عمق ۱۰ کیلومتری حدود **۳۷۰ درجهٔ سانتی‌گراد** است.

irantooshe.ir

۳۳ صفحه ۱۰۷ | تمرین ۹

الف) تابع $f(x) = -۳$ را رسم کنید و مقادیر $f(\sqrt{۵})$، $f(-۵)$، $f(۱۰۰)$، $f(۲)$ و $f(-۳/۴)$ را به‌دست آورید.

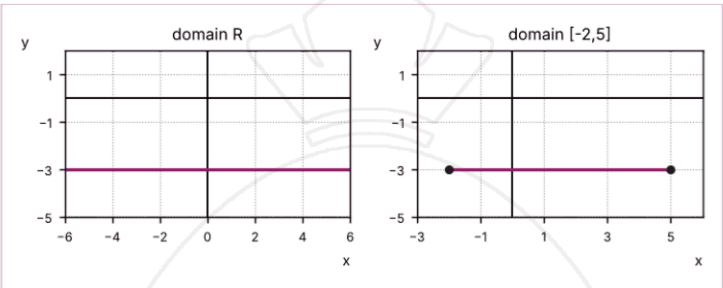
ب) اگر دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازهٔ [−۲، ۵] باشد، نیز رسم کنید.

الف) این تابع ثابت است و به هر x عدد ۳- را نسبت می‌دهد؛ پس:

$$f(۲) = f(۱۰۰) = f(-۵) = f(\sqrt{۵}) = f\left(-\frac{۳}{۴}\right) = -۳$$

ب) و پ) نمودار (ب) خط افقی $y = -۳$ روی همهٔ اعداد حقیقی و نمودار (پ) پاره‌خطی افقی از (۲-، ۳-) تا (۵، ۳-) است.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۴ صفحه ۱۰۸ | تمرین ۱۰

برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(۲) = ۱۱$ و $f(۰) = ۷$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

تابع خطی است: $f(x) = ax + b$. از $f(۰) = ۷$ نتیجه می‌شود $b = ۷$. از $f(۲) = ۱۱$:

$$۲a + ۷ = ۱۱ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x + ۷$$

نمودار، خطی است که از نقطه‌های (۰، ۷) و (۲، ۱۱) می‌گذرد (شیب ۲ و عرض از مبدأ ۷).

۳۵ صفحه ۱۰۸ | تمرین ۱۱

آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ (x: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶؛ y: ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶)

بله؛ مقدارهای x در جدول همه متفاوت‌اند (۱ تا ۶) و به هر x دقیقاً یک y نسبت داده شده است. در واقع ضابطهٔ آن $y = x^۲$ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۲

علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۱ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با f(t) نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - ۰/۱$ **ب)** $f(t) = ۰/۱t$ **پ)** $f(t) = t + ۰/۱$ **ت)** $f(t) = t / ۰/۱$ **(یا** $f(t) = t - ۰/۱$**)**

مسافت = سرعت × زمان = $t \times ۰/۱$؛ پس گزینهٔ **ب)** $f(t) = ۰.۱t$ درست است. (نمونه: ۱۰ دقیقه ← ۱ کیلومتر.)

۳۷ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۳

اگر دربارهٔ تابع g داشته باشیم (چهار مقدار g در چهار نقطه داده شده است)، g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

روش: هر شرط به شکل $g(a) = b$ یعنی زوج مرتب (a, b). چهار شرط داده‌شده را به‌ترتیب به‌صورت زوج مرتب می‌نویسیم و g را مجموعهٔ آن چهار زوج قرار می‌دهیم: $g = \{(a_۱, b_۱), (a_۲, b_۲), (a_۳, b_۳), (a_۴, b_۴)\}$.

برای نمودار، هر زوج را به‌صورت یک نقطهٔ جدا (طول a، عرض b) روی صفحهٔ مختصات می‌گذاریم و آن‌ها را به هم وصل نمی‌کنیم.

صورت دقیق مقادیر g در متن در دسترس نبود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸ صفحه ۱۰۸ تمرین ۱۴

برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) ۲۰- درجهٔ سانتی‌گراد، چند درجهٔ فارنهایت است؟

ب) ۱۰۴ درجهٔ فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست آورد.

ت) آیا رابطهٔ بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

الف) $F = \frac{۹}{۵}(-۲۰) + ۳۲ = -۳۶ + ۳۲ = -۴$؛ یعنی **۴- درجهٔ فارنهایت**.

ب) $۱۰۴ = \frac{۹}{۵}C + ۳۲ \Rightarrow \frac{۹}{۵}C = ۷۲ \Rightarrow C = ۴۰$؛ یعنی **۴۰ درجهٔ سانتی‌گراد**.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) $F - ۳۲ = \frac{۹}{۵}C \Rightarrow C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲) = \frac{۵}{۹}F - \frac{۱۶۰}{۹}$

ت) بله؛ هر دو رابطه به شکل «عددی ضربدر متغیر به‌علاوهٔ عدد ثابت» $(y = ax + b)$ هستند: F برحسب C با $a = \frac{۹}{۵}, b = ۳۲$ و C برحسب F با $a = \frac{۵}{۹}, b = -\frac{۱۶۰}{۹}$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۹ صفحه ۱۰۸ **تمرین ۱۵**

طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

اگر عرض x باشد، طول $x + ۳$ است:

$$P(x) = ۲[x + (x + ۳)] = ۴x + ۶, \quad x > ۰$$

۴۰ صفحه ۱۰۸ **تمرین ۱۶**

دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن‌ها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

مثال اول (متناهی): $f = \{(۱, ۱), (۲, ۲)\}$ و $g = \{(۱, ۲), (۲, ۱)\}$؛ دامنه و برد هر دو {۱، ۲}، اما زوج مشترک ندارند.

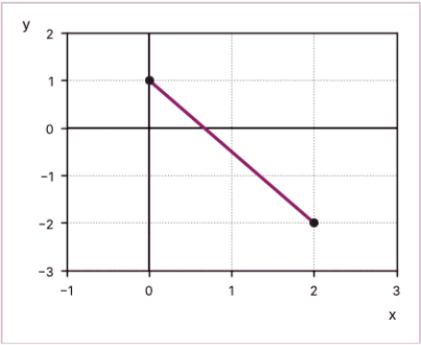
مثال دوم (نامتناهی): $f(x) = x$ و $g(x) = x + ۱$ هر دو با دامنهٔ R (برد هر دو R)؛ چون $x \neq x + ۱$ هیچ زوج مشترکی ندارند.

۴۱ صفحه ۱۰۸ **تمرین ۱۷**

نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن [۰، ۲] و برد آن [−۲، ۱] باشد. چه تعداد از این‌گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

پاره‌خطی از (۰، ۱) تا (۲، −۲) را رسم می‌کنیم: $f(x) = ۱ - \frac{۳}{۲}x, \quad x \in [۰, ۲]$. این تابع دامنهٔ [۰، ۲] دارد و مقدارهایش همهٔ اعداد بین ۲− و ۱ هستند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



هر منحنی دیگر (مثلاً قسمتی از سهمی یا نمودار شکسته) که روی [۰، ۲] تعریف شده و همهٔ مقادیر از ۲- تا ۱ را بپوشاند هم درست است؛ پس تعداد چنین توابعی **بی‌شمار** است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۲ صفحه ۱۰۹ فعالیت ۱

جدول‌های زیر را کامل کنید. (طول ضلع مربع: ۰/۱، ۱، ۲/۵، ۳، ۴، ۱۲، x و مساحت آن؛ شعاع دایره: ۱، ۲، ۳، r و مساحت آن)

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از ..... است و به‌صورت f(x) = ... قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از ..... است و به‌صورت g(r) = ... قابل نمایش است.

چون f و g به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از x و r بیان شده‌اند، آن‌ها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجهٔ سوم از r (شعاع کره) بنویسید: V(r) = ...

توابع زیر همگی توابع چندجمله‌ای‌اند: $r(t)$، $g(x) = 4x^2 - 3$، $h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$، $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$.

تابع f را به‌صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیهٔ توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

طول ضلع	۰/۱	۱	۲/۵	۳	۴	۱۲	x
مساحت	۰/۰۱	۱	۶/۲۵	۹	۱۶	۱۴۴	x^2

شعاع	۱	۲	۳	r
مساحت	π	4π	9π	πr^2

مساحت مربع تابعی از **x** است و به‌صورت $f(x) = x^2$ نمایش داده می‌شود؛ مساحت دایره تابعی از **r** است و به‌صورت $g(r) = \pi r^2$ نمایش داده می‌شود.

حجم کره: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

نمایش به‌صورت y: $y = 4x^2 - 3$، $y = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$؛ و برای $r(t)$ نیز همین ضابطه را به‌جای $r(t)$ در برابر y می‌نویسیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۳ صفحه ۱۱۰ فعالیت ۲

دامنه و برد توابع زیر را به‌دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟ (سه نمودار پیکانی که هر عضو را به خودش می‌برند؛ از جمله $f = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$)

در هر سه تابع، دامنه و برد برابرند (مثلاً برای f دامنه و برد هر دو $\{a, b, c\}$ است) و هر عضو دامنه دقیقاً به خودش نظیر می‌شود.

شباهت: دامنه = برد و هر عضو به خودش وصل می‌شود. **تفاوت:** مجموعه‌های دامنه و برد در آن‌ها فرق دارد (در یکی اعداد، در دیگری حروف).

اگر دامنه و برد برابر باشند و هر عضو دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را «همانی» می‌نامند. نمایش جبری آن $f(x) = x$ است و اگر دامنه R باشد نمودارش خط $y = x$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۴ صفحه ۱۱۰ فعالیت ۳

سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آن‌ها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی‌ای مشترک‌اند؟ (جدول ساعت ۸، ۹، ۱۰ با دمای هوای ۱۹، ۱۹، ۱۹؛ یک نمودار پیکانی؛ و نمودار $y = ۳$)

در جدول: دامنه {۸، ۹، ۱۰} و برد {۱۹}. در نمودار $y = ۳$: دامنه R (یا همان بازهٔ رسم‌شده) و برد {۳}.

ویژگی مشترک: در هر سه تابع، برد فقط یک عضو دارد؛ یعنی همهٔ اعضای دامنه به یک عضو واحد نظیر می‌شوند.

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم و آن را با $f(x) = k$ نمایش می‌دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۵ صفحه ۱۱۰ کار در کلاس ۱

برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چندجمله‌ای ارائه کنید.

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنهٔ آن $\{\alpha, \beta, ۲, ۵\}$ باشد.

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنهٔ آن ۵ عضوی باشد.

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

- تابع چندجمله‌ای: $f(x) = ۳x^۳ - x^۲ + ۵$
- تابع همانی: $f = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (۲, ۲), (۵, ۵)\}$
- دامنه و برد برابر ولی غیرهمانی: $g = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۱)\}$ (دامنه و برد هر دو {۱، ۲، ۳}، ولی ۱ ← ۲ نه ۱ ← ۱).
- تابع ثابت با دامنهٔ ۵ عضوی: $h(x) = ۷, \quad x \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ (برد {۷}).
- تابع ثابت در دنیای واقعی: تابعی که به هر ساعت از یک شبانه‌روز، تعداد ساعت‌های همان شبانه‌روز (۲۴) را نسبت می‌دهد؛ یا تعداد زاویه‌های داخلی هر مثلث (۳) یا مجموع زوایای داخلی مثلث (۱۸۰ درجه) برای مثلث‌های مختلف.

۴۶ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس ۲

نمودارهای توابع داده‌شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

$f(x)=x^2$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی؛ $g(x)=x^2$ با دامنهٔ $[-۲، ۳]$؛ $h(x)=x^2$ با دامنهٔ $\{-۲، ۰، ۱، ۲\}$؛ $t(x)=x^2$ با دامنهٔ مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی. دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.

تابع	دامنه	برد
$f(x) = x^2$	R	$[۰، +\infty)$
$g(x) = x^2$	$[-۲، ۳]$	$[۰، ۹]$
$h(x) = x^2$	$\{-۲، ۰، ۱، ۲\}$	$\{۰، ۱، ۴\}$
$t(x) = x^2$	$(-\infty، ۰)$	$(۰، +\infty)$

تفاوت نمودارها: f کل سهمی؛ g قسمتی از سهمی بین $x = -۲$ و $x = ۳$ (با ارتفاع حداکثر ۹ در $x = ۳$)؛ h چهار نقطهٔ (۲-، ۴)، (۰، ۰)، (۱، ۱)، (۲، ۴)؛ و t شاخهٔ چپ سهمی بدون نقطهٔ مبدأ.

برای g: کمترین مقدار ۰ (در $x = ۰$) و بیشترین مقدار ۹ (در $x = ۳$) است.

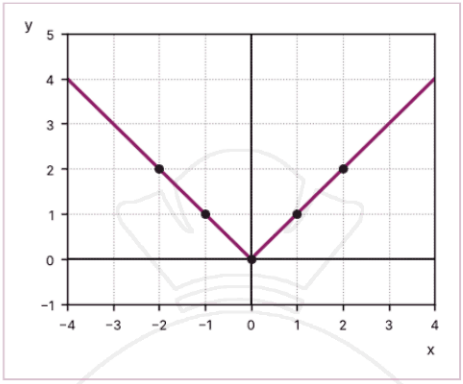
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۷ صفحه ۱۱۱ فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده‌شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.

x	-۲	-۱/۲	۰	۱/۲	۱	۲
$\|f(x) = \|x$	۲	۱/۲	۰	۱/۲	۱	۲



دامنه: همهٔ اعداد حقیقی R؛ برد: $[0, +\infty)$ (چون قدرمطلق هیچ عددی منفی نیست و برای هر $y \geq 0$ دو ورودی $\pm y$ داریم).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۸ صفحه ۱۱۲ فعالیت

اگر دامنهٔ یک تابع قدرمطلق مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

تابع $f(x) = |x|$ برای $x \geq 0$ برابر x و برای $x < 0$ برابر $-x$ است؛ نمودار آن شکل V با رأس مبدأ مختصات است: نیم‌خط $y = x$ به‌ازای $x \geq 0$ و نیم‌خط $y = -x$ به‌ازای $x < 0$ (همان نمودار شکل بالا). دامنه R و برد $[0, +\infty)$ است.

چون برای $x \geq 0$ و $x < 0$ ضابطه‌های مختلف دارد، تابع قدرمطلق یک تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای) است.

۴۹ صفحه ۱۱۲ فعالیت

توابع f، g، h و نیز قسمتی از نمودارهای آن‌ها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

مقادیر g(۰)، h(۵)، g(−۲)، f(۳) و ... را بیابید.

روش: برای هر ضابطهٔ قطعه‌ای، هر قسمت را فقط روی بازهٔ مربوط به خودش رسم می‌کنیم: جدول مقدار برای چند نقطهٔ همان بازه می‌نویسیم، نقطه‌ها را وصل می‌کنیم؛ ابتدا و انتهای هر قطعه را با نقطهٔ توپر (بازهٔ بسته) یا توخالی (بازهٔ باز) نشان می‌دهیم. نمودار متعلق به هر تابع را با مقایسهٔ چند نقطه و قسمت‌های داده‌شده تشخیص می‌دهیم. دامنه، اجتماع بازه‌های همهٔ قطعه‌ها و برد، اجتماع بردهای قطعه‌هاست. برای محاسبهٔ f(a) ابتدا بازه‌ای را که a در آن است پیدا می‌کنیم و در ضابطهٔ همان قسمت می‌گذاریم.

ضابطه‌ها و شکل‌های این فعالیت از متن قابل بازسازی نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

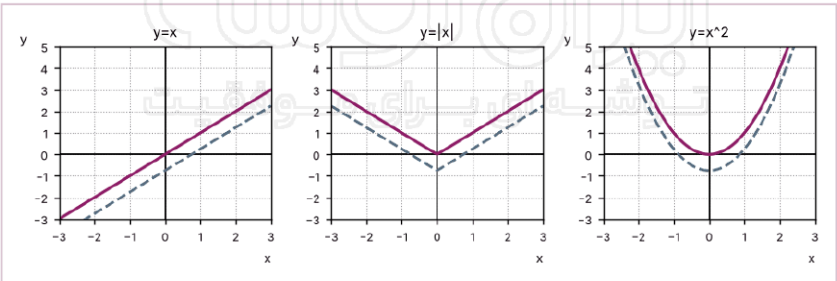
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۰ صفحه ۱۱۳ **فعالیت**

نمودارهای توابع $f(x)=x$، $g(x)=|x|$، $h(x)=x^2$ و $f(x)=x+۳$، $g(x)=|x|+۳$، $h(x)=x^2+۳$ داده شده‌اند.
توضیح دهید که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x)=x-۳/۴$، $g(x)=|x|-۳/۴$ و $h(x)=x^2-۳/۴$ را به همین روش رسم کنید.

هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)+۳$ همان نقطه از نمودار $y=f(x)$ است که ۳ واحد بالاتر آمده (عرض‌ها ۳ تا زیاد شده‌اند)؛ یعنی نمودار سه تابع آخر از **انتقال ۳ واحدی به سمت بالا** (در امتداد محور y) نمودار سه تابع اول به‌دست می‌آید.

برای رسم $f(x)-\frac{۳}{۴}$ و ... نمودارهای x و |x| و x^2 را $\frac{۳}{۴}$ واحد به سمت **پایین** منتقل می‌کنیم (خط‌چین‌ها در شکل؛ رأس $|x|-\frac{۳}{۴}$ و $x^۲-\frac{۳}{۴}$ نقطهٔ $(۰, -\frac{۳}{۴})$ است).



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۱ صفحه ۱۱۳ کار در کلاس ۱

نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. مقادیر $g(-۲)$، $g(۲)$، $f(۵)$، $g(۰)$، $f(۰)$ و ... را به‌دست آورید. (f و g توابعی قطعه‌ای‌اند.)

روش: هر قطعه را روی بازهٔ مخصوص خودش رسم می‌کنیم (دو نقطه برای قطعهٔ خطی؛ جدول برای سهمی) و در نقطهٔ پایان بازهٔ باز، دایرهٔ توخالی و در بازهٔ بسته، دایرهٔ توپر می‌گذاریم. دامنه، اجتماع بازه‌ها و برد، اجتماع مقادیر هر قطعه است.

برای مثال اگر $f(x) = ۳x + ۱ \ (x \le ۰)$، $f(x) = x^۲ \ (x > ۰)$ باشد: $f(-۲) = -۵$، $f(۰) = ۱$، $f(۵) = ۲۵$، دامنه R و برد $\mathbb{R} = (-\infty, ۱] \cup (۰, +\infty)$.

ضابطه‌های دقیق کتاب از متن قابل بازسازی نبود؛ پاسخ به‌صورت روش و نمونه آمده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۲ صفحه ۱۱۳ کار در کلاس ۲

نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطهٔ آن را به‌دست آورید. دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید.

روش: نمودار را به قطعه‌هایی تقسیم می‌کنیم که هر کدام خط یا سهمی ساده‌اند. برای هر قطعهٔ خطی، دو نقطه روی آن را می‌خوانیم و معادلهٔ خط را می‌نویسیم، بازهٔ x آن را از روی نمودار (دایره‌های توپر و توخالی) تعیین می‌کنیم و همه را به شکل $f(x) = \dots$ می‌نویسیم. دامنه از تصویر نمودار روی محور x و برد از تصویر روی محور y به دست می‌آید.

شکل کتاب در دسترس نبود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۳ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس ۱

در شکل زیر دامنه و برد توابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟ (نمودارهای $y = |x - ۳|$، $y = |x|$، $y = |x + ۱|$)

هر سه تابع دامنهٔ R و برد $[۰, +\infty)$ دارند (فقط جای رأس عوض شده است).

توضیح: نمودار $y = |x - ۳|$ همان نمودار $y = |x|$ است که ۳ واحد به **راست** منتقل شده (رأس در $(۳, ۰)$)، و نمودار $y = |x + ۱|$ همان نمودار $y = |x|$ است که ۱ واحد به **چپ** منتقل شده (رأس در $(-۱, ۰)$).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

قاعده: برای رسم $f(x+k)$ نمودار $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها منتقل می‌کنیم؛ اگر $k > 0$ انتقال به سمت چپ (جهت منفی) و اگر $k < 0$ به سمت راست (جهت مثبت) است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

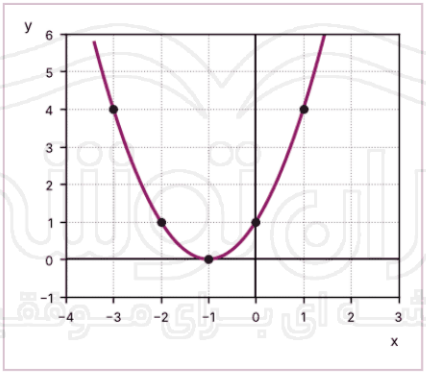
۵۴ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس ۲

در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید. (توابع: $y = x^2$، $y = (x-2)^2$، $y = -x^2$، $y = -(x+3)^2$)

تابع	دامنه	برد	رأس	توضیح
$y = x^2$	R	$[0, +\infty)$	$(0, 0)$	سهمی اصلی
$y = (x-2)^2$	R	$[0, +\infty)$	$(2, 0)$	۲ واحد انتقال به راست
$y = -x^2$	R	$(-\infty, 0]$	$(0, 0)$	قرینه نسبت به محور x
$y = -(x+3)^2$	R	$(-\infty, 0]$	$(-3, 0)$	قرینه و ۳ واحد انتقال به چپ

نمودار $f(x) = (x+1)^2$ همان نمودار $y = x^2$ است که ۱ واحد به **چپ** منتقل شده و رأس آن $(-1, 0)$ است؛ دامنه R و برد $[0, +\infty)$.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۵ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

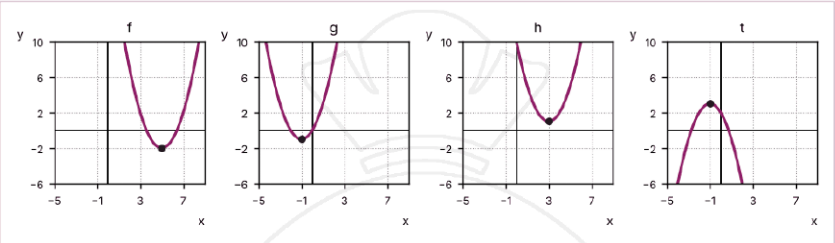
در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f، g، h و t رسم شده‌اند: $f(x) = (x-5)^2 - 2$، $g(x) = (x+1)^2 - 1$، $h(x) = -(x+1)^2 + 3(x-3)^2 + 1$، $t(x) =$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید.

هر تابع به شکل $a(x-p)^2+q$ سهمی‌ای با رأس (p, q) است؛ نمودارها را با رأس تشخیص می‌دهیم:

تابع	رأس	جهت دهانه	دامنه	برد
$f(x)=(x-5)^2-2$	$(5، -2)$	بالا	R	$[-2، +\infty)$
$g(x)=(x+1)^2-1$	$(-1، -1)$	بالا	R	$[-1، +\infty)$
$h(x)=(x-3)^2+1$	$(3، 1)$	بالا	R	$[1، +\infty)$
$t(x)=-(x+1)^2+3$	$(-1، 3)$	پایین	R	$(-\infty، 3]$



برای تعیین نمودارها: سهمی‌ای که رأس آن $(5، -2)$ است f است، رأس $(-1، -1)$ برای g، رأس $(3، 1)$ برای h و سهمی رو به پایین با رأس $(-1، 3)$ برای t.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۶ صفحه ۱۱۵ تمرین ۱

تابع $f(x)=3x-1$ را که دامنهٔ آن مجموعهٔ $\{1/2، 0، 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به‌دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید. اگر دامنهٔ این تابع R باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟

$$f(0)=-1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},\quad f(5)=14$$

برد $=\left\{-1, \frac{1}{2}, 14\right\}$؛ زوج‌های مرتب: $f=\left\{(0, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (5, 14)\right\}$؛ نمودار پیکانی: $0 \leftarrow -1$، $1/2 \leftarrow 1/2$، $5 \leftarrow 14$. نمودار مختصاتی: سه نقطهٔ جدا از هم.

اگر دامنه R باشد: نمودار کل خط $y=3x-1$ است (به‌جای سه نقطه)، برد آن R می‌شود و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی دیگر با فهرست‌کردن اعضا ممکن نیست؛ فقط ضابطهٔ جبری و نمودار خط را داریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۷ صفحه ۱۱۵ **تمرین ۲**

در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به‌صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.

روش: دامنه = تصویر نمودار روی محور x (از چپ‌ترین تا راست‌ترین نقطه، با توجه به دایره‌های توپر و توخالی) و برد = تصویر نمودار روی محور y (از پایین‌ترین تا بالاترین نقطه). هر کدام را به‌صورت بازه می‌نویسیم، مثلاً $[a, b]$ برای دو سر بسته و (a, b) برای دو سر باز.

نمایش جبری: اگر نمودار خط است و از نقطه‌هایی مانند (۰، ۱-) و (۸، ۷) می‌گذرد، شیب $\frac{۷ - (-۱)}{۸ - ۰} = ۱$ و ضابطه $y = x - ۱$ است. اگر نمودار سهمی با رأس (p, q) باشد، $y = a(x - p)^۲ + q$ و ضریب a از یک نقطهٔ دیگر به‌دست می‌آید.

شکل‌های کتاب در دسترس نبود؛ پاسخ به شکل روش ارائه شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۸ صفحه ۱۱۶ **تمرین ۳**

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنهٔ تابع $f(x) = x^۲ - ۱$ برابر $(۰، +\infty)$ و برد آن نیز $(۰، +\infty)$ است.

ب) دامنهٔ تابع $f(x) = |x| - \frac{۱}{۳}$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(۲، +\infty)$ است.

پ) دامنهٔ تابع ثابت $f(x) = ۲$ برابر $(-\infty، +\infty)$ است.

ت) اگر $f(x) = ۲x^۲ + ۱$ آنگاه، $f(۲)/f(۱) = ۲$.

الف) نادرست. اگر دامنه مشخص نشده باشد R است و برد $x^۲ - ۱ \geq -۱$ یعنی $[-۱, +\infty)$ است؛ نه $(۰، +\infty)$.

ب) نادرست. دامنه R درست است ولی برد، چون کمترین مقدار $|x| - \frac{۱}{۳}$ در $x = ۰$ برابر $-\frac{۱}{۳}$ است، $\left[-\frac{۱}{۳}, +\infty\right)$ می‌شود، نه $(۲، +\infty)$.

پ) درست. تابع ثابت ۲ برای هر عدد حقیقی تعریف شده است، پس دامنه $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ و برد $\{۲\}$ است.

ت) نادرست (با فرض مقادیر f(۲) و f(۱)): $f(۱) = ۳, \ f(۲) = ۹ \Rightarrow \frac{f(۲)}{f(۱)} = ۳ \neq ۲$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۹ صفحه ۱۱۶ **تمرین ۴**

یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم‌کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

حجم استوانه $\pi r^2 h = 30\pi r^2$ و دو نیم‌کره روی هم یک کره به حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$ می‌سازند:

$$V(r) = 30\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad r > 0$$

۶۰ صفحه ۱۱۶ **تمرین ۵**

هر یک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟

الف) $y = x^2 - 3$ ب) $y = -x^2 + 2$ پ) $y = |x|$ ت) $y = -|x|$ ث) $y = (x+1)^2$ ج) $y = |x| - 1/2$ چ) $y = |x-2|$ ح) $y = -(x+2)^2$ خ) $y = -|x| - 2$ د) $y = -|x|$ ذ) $y = (x-2)^2 + 3$ ر) $y = |x| - 2$ ز) $y = (x + 1/2)^2 - 3$

برای شناسایی نمودار هر تابع، رأس و جهت دهانه را می‌یابیم:

تابع	رأس	شکل	دامنه	برد
الف) $x^2 - 3$	$(0, -3)$	سهمی رو به بالا	R	$[-3, +\infty)$
ب) $-x^2 + 2$	$(0, 2)$	سهمی رو به پایین	R	$(-\infty, 2]$
پ) $\|x\|$	$(0, 0)$	V	R	$[0, +\infty)$
ت) $-\|x\|$	$(0, 0)$	V وارونه	R	$(-\infty, 0]$
ث) $(x+1)^2$	$(-1, 0)$	سهمی رو به بالا	R	$[0, +\infty)$
ج) $\|x\| - 1/2$	$(0, -1/2)$	V	R	$[-1/2, +\infty)$
چ) $\|x-2\|$	$(2, 0)$	V	R	$[0, +\infty)$
ح) $-(x+2)^2$	$(-2, 0)$	سهمی رو به پایین	R	$(-\infty, 0]$
خ) $-\|x - 2\|$	$(0, -2)$	V وارونه	R	$(-\infty, -2]$
د) $(x-2)^2 + 3$	$(2, 3)$	سهمی رو به بالا	R	$[3, +\infty)$
ذ) $\|x\| - 2$	$(0, -2)$	V	R	$[-2, +\infty)$
ر) $(x+1/2)^2 - 3$	$(-1/2, -3)$	سهمی رو به بالا	R	$[-3, +\infty)$

نمودارهای کتاب در دسترس نبود؛ برای تطبیق هر شکل با تابع، رأس و جهت دهانهٔ آن را با جدول بالا مقایسه کنید.

ایران توشه
توشه او برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۱ صفحه ۱۱۷ تمرین ۶

فرض کنیم دامنهٔ هر یک از توابع تمرین ۵ به بازهٔ [−۲، ۳] محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

با بررسی کمترین و بیشترین مقدار تابع روی [−۲، ۳] (در رأس یا دو سر بازه):

تابع	برد روی [−۲، ۳]	توضیح
الف) $x^2 - ۳$	[−۳، ۶]	کمینه در x=۰ و بیشینه در x=۳
ب) $-x^2 + ۲$	[−۷، ۲]	بیشینه در x=۰ و کمینه در x=۳
پ) $\|x\|$	[۰، ۳]	
ت) $-\|x\|$	[−۳، ۰]	
ث) $(x+۱)^2$	[۰، ۱۶]	رأس x=−۱ در بازه؛ بیشینه در x=۳
ج) $\|x\| - ۱/۲$	[−۱/۲، ۵/۲]	
چ) $\|x-۲\|$	[۰، ۴]	کمینه در x=۲؛ بیشینه در x=−۲
ح) $-(x+۲)^2$	[−۲۵، ۰]	رأس x=−۲ در بازه؛ کمینه در x=۳
خ) $-\|x\| - ۲$	[−۵، −۲]	
د) $۳(x-۲)^2 + ۳$	[۳، ۱۹]	کمینه در x=۲؛ بیشینه در x=−۲
ذ) $\|x\| - ۲$	[−۲، ۱]	
ر) $۳(x+۱/۲)^2 - ۳$	[−۳، ۳۷/۴]	رأس x=−۱/۲ در بازه؛ بیشینه در x=۳: ۴۹/۴−۳

(برای مثال ث: $(۳ + ۱)^۲ = ۱۶$ و برای ح: $-(۳ + ۲)^۲ = -۲۵$.)

۶۲ صفحه ۱۱۷ تمرین ۷

نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته‌شده را حساب کنید. (f(۶)، f(√۵)، f(−۵/۲)، f(۰)، f(۱/۲)، f(۳))

روش: قطعه‌های نمودار را تشخیص می‌دهیم، برای هر قطعه ضابطه و بازهٔ آن را از روی نقطه‌های مشخص نمودار می‌نویسیم، سپس برای هر عدد خواسته‌شده، بازه‌ای که آن عدد در آن است را پیدا می‌کنیم و آن را در ضابطهٔ همان قطعه قرار می‌دهیم.

شکل کتاب در دسترس نبود، پس مقادیر عددی را نمی‌توان خواند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۳ صفحه ۱۱۷ تمرین ۸

نمودار یک تابع خطی از نقاط (۴، ۳) و (۰، ۳) می‌گذرد. f(−۴) و f(−۱) را به‌دست آورید.

عرض هر دو نقطه ۳ است، پس شیب صفر و تابع ثابت $f(x) = ۳$ است:

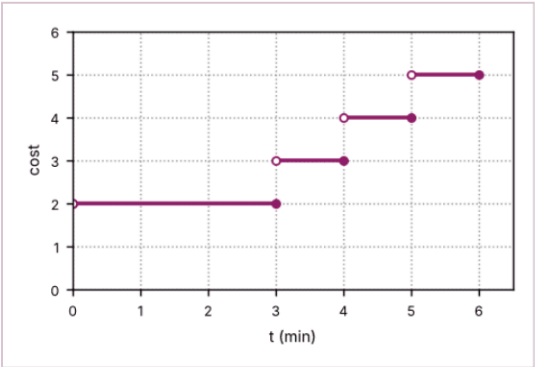
$$f(-۱) = ۳, \quad f(-۴) = ۳$$

۶۴ صفحه ۱۱۷ تمرین ۹

هزینهٔ مکالمهٔ تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینهٔ آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

زمان t (دقیقه)	۰ < t ≤ ۳	۳ < t ≤ ۴	۴ < t ≤ ۵	۵ < t ≤ ۶
هزینه (هزار تومان)	۲	۳	۴	۵

نمودار، تابعی پله‌ای است: پاره‌خط‌های افقی که در سمت چپ نقطهٔ توخالی و در سمت راست نقطهٔ توپر دارند.



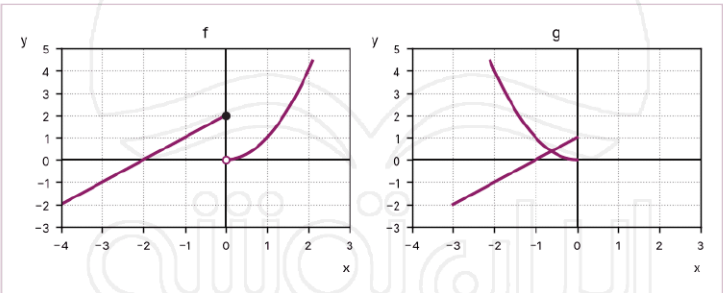
۶۵ صفحه ۱۱۷ تمرین ۱۰

کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$f(x) = \{x^2 \;،\; x > 0 \;؛\; x \;،\; x \le 0\}$ $g(x) = \{x + 2 \;،\; x \le 0 \;؛\; x^2 \;،\; x < 0\}$ $\{x + 1 \;،\; x \le 0$

f تابع است: دو قطعهٔ آن روی بازه‌های جدا از هم ($x > 0$ و $x \le 0$) تعریف شده‌اند و به هر x دقیقاً یک مقدار نسبت می‌دهند.

g تابع نیست: بازه‌های $x < 0$ و $x \le 0$ هم‌پوشانی دارند؛ مثلاً برای $x = -1$ دو مقدار $(-1)^2 = 1$ و $-1 + 1 = 0$ به‌دست می‌آید؛ یعنی دو زوج $(-1، 1)$ و $(-1، 0)$ داریم.



ضابطه‌های دقیق از متن کتاب قابل بازسازی کامل نبود؛ استدلال بر اساس هم‌پوشانی بازه‌هاست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۶۶ صفحه ۱۱۷ تمرین ۱۱

الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است. الف) جدول زیر را کامل کنید. (تعداد ذوزنقه‌ها n: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵؛ محیط شکل)

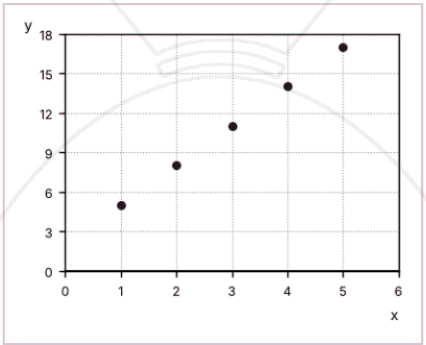
ب) چرا رابطهٔ بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

با فرض ذوزنقهٔ با اضلاع ۱، ۱، ۱ و ۲ (قاعده‌ها ۱ و ۲): یک ذوزنقه محیط ۵ دارد و هر ذوزنقهٔ تازه با چسباندن به ضلع ۱، محیط را ۳ واحد زیاد می‌کند (۴ ضلع جدید منهای ۲ برابر ضلع مشترک):

n	۱	۲	۳	۴	۵
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷

$$P(n) = 3n + 2$$

برای هر تعداد ذوزنقه فقط یک محیط وجود دارد، پس تابع است. دامنه: اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و برد: $\{5, 8, 11, 14, \ldots\}$. نمودار، نقطه‌های جدا از هم‌اند:



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۶۷ صفحه ۱۱۷ تمرین ۱۲

نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط (۱، ۲-) و (۲، ۳-) می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

عرض از مبدأ ۱ است، پس $y = ax^2 + bx + 1$. از دو نقطه:

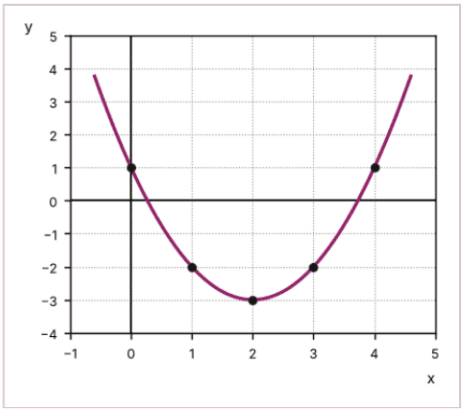
$$(1, -2): \ a + b + 1 = -2 \Rightarrow a + b = -3$$

$$(2, -3): \ 4a + 2b + 1 = -3 \Rightarrow 2a + b = -2$$

با کم‌کردن: $a = 1, \ b = -4$؛ پس

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$$

رأس سهمی (۲، ۳-) و دهانه رو به بالاست. دامنه $\mathbb{R}$ و برد $[-3, +\infty)$ است.



این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت